УДК 514.752

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НУЛЕВОЙ ПОЛНОЙ КРИВИЗНЫ ВТОРОГО РОДА В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н.М. Онищук, Д.Л. Нарежнева

Томский государственный университет
E-mail: Sengulie@yandex.ru

Исследована геометрия гладкого векторного поля, для которого полная кривизна 2-го рода равна нулю в некоторой области G четырёхмерного евклидова пространства $\mathbf{E}_4$. *Дана полная классификация таких векторных полей в зависимости от ранга основного линейного оператора. Изучены геометрические свойства кривых неголономного пфаффова многообразия, ортогонального векторному полю, для каждого класса. Построен пример векторного поля (в целом), имеющего постоянный не равный нулю вектор неголономности. Исследование ведётся при помощи метода внешних форм Картана с использованием подвижного репера.*

Введение

Пусть $\boldsymbol{v}$ – гладкое векторное поле без особых точек в области $G\subset \boldsymbol{E}_4$. К полю $\boldsymbol{v}$ присоединим подвижной ортонормированный репер $\{M;\vec{e}_\alpha\}$, $M\in G$. Его деривационные формулы запишем в виде

$$d\vec{r}=\omega^\alpha \vec{e}_\alpha, d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M,

$$\vec{e}_4=\frac{v}{|\vec{v}|}, \omega_\alpha^\beta=-\omega_\beta^\alpha, d\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha, d\omega_\alpha^\beta=$$
$$=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta, (\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,4}).$$

При этом уравнение Пфаффа $\omega^4=0$ задаёт трёхмерное распределение (M, π_3) [1], т. е. гладкое отображение, сопоставляющее всякой точке $M\in \boldsymbol{G}$ гиперплоскость π_3, ортогональную вектору поля $\boldsymbol{v}$ в этой точке. Все интегральные линии и поверхности уравнения $\omega^4=0$, проходящие через M, касаются в данной точке гиперплоскости π_3. Совокупность всех интегральных кривых и поверхностей уравнения Пфаффа $\omega^4=0$ назовём (следуя [2]) пфаффовым многообразием, ортогональным векторному полю $\boldsymbol{v}$. Плоскость π_3 – касательной плоскостью пфаффова многообразия $\omega^4=0$ в точке M. Если уравнение $\omega^4=0$ вполне интегрируемо, то через каждую точку M проходит одна интегральная гиперповерхность, и мы имеем слоение [3]. Пфаффово многообразие в этом случае называется голономным [1, 2]. В противном же случае – неголономным. Мы будем исследовать векторное поле с неголономным пфаффовым многообразием.

Основные инварианты векторного поля (а также ортогонального ему пфаффова многообразия) совпадают с инвариантами основного линейного оператора A [4], определяемого формулой

$$A(d\vec{r})=d\vec{e}_4.$$

Его матрица в базисе $\{\vec{e}_\alpha\}$ совпадает с матрицей (A_β^α), получающейся в разложении главных форм Пфаффа ω_4^α по базисным формам ω^α:

$$\omega_4^\alpha=A_\beta^\alpha\omega^\beta. \quad (1)$$

Одно из собственных значений λ_0 оператора A равно нулю. Собственные векторы ξ (ξ^α) соответствующие $\lambda_0=0$, определяются системой уравнений

$$A_\alpha^i\xi^\alpha=0, (i=1,2,3) \quad (2)$$

и являются касательными к эквидирекционным линиям (линиям, вдоль которых векторы поля параллельны [2, 4]). В зависимости от ранга оператора A через точку M проходит либо одна эквидирекционная линия (rang A=3), либо эквидирекционная поверхность – двумерная (rang A=2) или трёхмерная (rang A=1). Все эти случаи мы исследуем ниже.

В работе используются следующие обозначения: $k_i^{(2)}$ – главные кривизны 2-го рода, $K_2=-k_1^{(2)}k_2^{(2)}k_3^{(2)}$ – полная кривизна 2-го рода, $\vec{\rho}=\rho^i\vec{e}_i$ – вектор неголономности, $k_i^{(1)}$ – главные кривизны 1-го рода, $K_1=-k_1^{(1)}k_2^{(1)}k_3^{(1)}$ – полная кривизна 1-го рода, A^* – сужение оператора A на плоскость π_3 [4].

Векторное поле, для которого K_2=0 и rang A=3

Такое векторное поле характеризуется тем, что через каждую точку M проходит единственная эквидирекционная линия и эта линия принадлежит пфаффову многообразию $\omega^4=0$. Направим вектор $\vec{e}_1$ по касательной к эквидирекционной линии, тогда из (2) следует $A_1^1=A_1^2=A_1^3=0$. А так как rang A=3, то определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 \\ A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 \\ A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Покажем, что для исследуемого поля (K_2=0, rang A=3) эквидирекционная линия является также линией кривизны 2-го рода. Для этого достаточно показать, что одно из главных направлений 2-го рода совпадает с направлением вектора $\vec{e}_1$. Главные кривизны 2-го рода [4] отличаются лишь знаком от корней уравнения

$$\begin{vmatrix} A_1^1-\lambda & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2-\lambda & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Так как K_2=0, то хотя бы одна из главных кривизн 2-го рода равна нулю, пусть $k_1^{(2)}=0$. Соответствующий собственный вектор, определяющий главное направление 2-го рода, найдётся из системы уравнений

$$A_j^i\xi^j=0,(i,j=1,2,3),$$

а так как $A_1^1=A_1^2=A_1^3=0$, то в плоскости π_3 мы получаем вектор, для которого $\xi^2=\xi^3=0$, т. е. вектор $\vec{e}_1$ – это вектор главного направления 2-го рода.

Покажем, что эквидирекционная линия является ещё и асимптотической линией пфаффова многообразия $\omega^4=0$. Находим асимптотические линии, для них

$$\left\langle d^2\vec{r},\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\rangle=0.$$

Отсюда, используя деривационные формулы, приходим к уравнению

$$A_2^2(\omega^2)^2+A_3^3(\omega^3)^2+A_2^1\omega^1\omega^2+$$
$$+A_3^1\omega^1\omega^3+(A_3^2+A_2^3)\omega^2\omega^3=0, \qquad (3)$$

определяющему асимптотические линии на $\omega^4=0$. Уравнение (3) при $\omega^2=\omega^3=\omega^4=0$ обращается в тождество. А так как $\omega^2=\omega^3=\omega^4=0$ – эквидирекционные линии, то это значит, что всякая эквидирекционная линия является асимптотической линией. Асимптотическая линия, совпадающая с эквидирекционной, лежит в плоскости π_3. Касательные к асимптотическим линиям, проходящим через точку M, образуют конус

$$A_2^2(x^2)^2+A_3^3(x^3)^2+A_2^1x^1x^2+$$
$$+A_3^1x^1x^3+(A_3^2+A_2^3)x^2x^3=0. \qquad (4)$$

Исследуем множество плоскостей π_3. Находим характеристику плоскости π_3 при смещении по любой кривой, проходящей через точку M:

$$x^4=0,$$
$$(A_2^1\omega^2+A_3^1\omega^3+A_4^1\omega^4)x^1+(A_2^2\omega^2+A_3^2\omega^3+A_4^2\omega^4)x^2+$$
$$+(A_2^3\omega^2+A_3^3\omega^3+A_4^3\omega^4)x^3-\omega^4=0. \qquad (5)$$

В уравнение (5) входят только три базисные формы. Это говорит о том, что множество плоскостей π_3 зависит только от трёх параметров (а не от четырёх как в общем случае). Характеристическая точка M_0 плоскости π_3 имеет координаты

$$M_0\left(\frac{\begin{vmatrix} A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}}{\Delta},\frac{\begin{vmatrix} A_2^3 & A_2^1 \\ A_3^3 & A_3^1 \end{vmatrix}}{\Delta},\frac{\begin{vmatrix} A_2^1 & A_2^2 \\ A_3^1 & A_3^1 \end{vmatrix}}{\Delta},0\right),\Delta\neq 0.$$

То есть плоскости π_3 имеют огибающую – трёхмерную поверхность, описываемую точками M_0. Подставив координаты точки M_0 в уравнение (4), убеждаемся, что точка M_0 лежит на касательной к одной из асимптотических линий, проходящих через точку M. Итак, прямая MM_0 – касательная к одной из асимптотических линий.

Поместим вектор $\vec{e}_2$ в плоскость $\{M,\vec{e}_1,\overline{MM_0}\}$, тогда $A_2^1A_3^2=A_3^1A_2^2$ и репер становится каноническим. Заметим, что характеристики плоскости π_3 при смещении по кривым, принадлежащим $\omega^4=0$, образуют пучок, осью которого является прямая MM_0, (это следует из (5)).

Переходим к нахождению главных направлений 2-го рода, соответствующих кривизнам $k_2^{(2)},k_3^{(2)}$. Из уравнения

$$\lambda^2-(A_2^2+A_3^3)\lambda+A_2^2A_3^3-A_3^2A_2^3=0$$

находим $\lambda^2=-k_2^{(2)}$, $\lambda^3=-k_3^{(2)}$. Вычислив главные направления 2-го рода, соответствующие кривизнам $k_2^{(2)},k_3^{(2)}$, убеждаемся, что они ортогональны прямой MM_0. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Гладкое векторное поле, для которого* K_2=0 *и* rang A=3 *обладает следующими свойствами*: 1) *равна нулю только одна из главных кривизн 2-го рода* ($k_1^{(2)}=0$); 2) *через каждую точку M проходит одна эквидирекционная* линия, совпадающая *с линией кривизны 2-го рода и являющаяся также асимптотической линией, лежащей в плоскости* π_3, 3) *множество плоскостей* π_3 *зависит от трёх параметров и имеет в качестве огибающей трёхмерную поверхность*; 4) *характеристики плоскости* π_3, *полученные при смещении по всем кривым, принадлежащим* $\omega^4=0$, *образуют пучок с осью* MM_0 (M_0 – *точка огибающей в плоскости* π_3); 5) *в точке M главные направления 2-го рода, соответствующие* $k_2^{(2)}$ *и* $k_3^{(2)}$ *ортогональны прямой* MM_0; 6) *прямая* MM_0 *является касательной к асимптотической линии, не лежащей в плоскости* π_3.

Векторные поля, для которых K_2=0 и rang A=2

В этом случае через каждую точку $M\in G$ проходит одна 2-мерная эквидирекционная поверхность, являющаяся интегральной поверхностью системы уравнений Пфаффа:

$$A_1^1\omega^1 + A_2^1\omega^2 + A_3^1\omega^3 + A_4^1\omega^4 = 0,$$
$$A_1^2\omega^1 + A_2^2\omega^2 + A_3^2\omega^3 + A_4^2\omega^4 = 0. \qquad (6)$$

Обозначим

$$A_* = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{pmatrix}.$$

Касательная плоскость T_2 эквидирекционной поверхности в точке M определяется уравнениями

$$A_1^1x^1 + A_2^1x^2 + A_3^1x^3 + A_4^1x^4 = 0,$$
$$A_1^2x^1 + A_2^2x^2 + A_3^2x^3 + A_4^2x^4 = 0. \qquad (7)$$

Плоскость T_2 либо пересекает плоскость π_3 по прямой, когда rang A_*=2, либо принадлежит плоскости π_3, когда rang A_*=1.

Рассмотрим каждую из этих возможностей.

а) Пусть rang A_*=2. Направим вектор $\vec{e}_1$ по линии пересечения T_2 и π_3, тогда

$$A_1^1 = A_1^2 = 0, \begin{vmatrix} A_2^1 & A_3^1 \\ A_2^2 & A_3^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

А так как K_2=0, то A_1^3=0. Легко проверить, что в точке M одна из линий кривизны 2-го рода (та, которая соответствует кривизне $k_1^{(2)}$=0) лежит на эквидирекционной поверхности, т. е. является эквидирекционной линией. Кроме того, эта линия лежит в плоскости π_3 и представляет собой асимптотическую линию. Множество плоскостей π_3 зависит от трёх параметров, но в силу того, что rang A=2, это множество не имеет огибающей. Характеристики плоскости π_3, получающиеся при смещении по кривым из ω^4=0, есть двумерные плоскости, проходящие через одну прямую

$$A_2^1x^1 + A_2^2x^2 + A_2^3x^3 = 0,$$
$$A_3^1x^1 + A_3^2x^2 + A_3^3x^3 = 0,$$
$$x^4 = 0. \qquad (8)$$

Характеристики же плоскости π_3, получающиеся при смещении по любой кривой, не принадлежащей ω^4=0, параллельны прямой (8). Прямая (8) касается некоторой асимптотической линии, не лежащей в плоскости π_3. Можно показать, что этой прямой ортогональны главные направления 2-го рода, соответствующие кривизнам $k_2^{(2)}$≠0, $k_3^{(2)}$≠0. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Гладкое векторное поле, для которого* K_2=0, rang$A$=2, rangA_*=2 обладает *следующими свойствами*: 1) *равна нулю только одна из главных кривизн 2-го рода* ; 2) *через каждую точку M проходит одна 2-мерная эквидирекционная поверхность, на которой одна из линий является линией кривизны второго рода* (*та, которая отвечает кривизне* $k_1^{(2)}$=0) *а также – асимптотической линией, лежащей в плоскости* π_3; 3) *множество плоскостей* π_3 *зависит от трёх параметров, но не имеет огибающей*; 4*) характеристики плоскости* π_3, *полученные при смещении по кривым из* ω^4=0 *образуют пучок, ось которого касается асимптотической линии, не совпадающей с линией кривизны 2-го рода*; 5) *линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизнам* $k_2^{(2)}$,$k_3^{(2)}$, *ортогональны этой асимптотической*; 6) *характеристики плоскости* π_4, *полученные при смещении по кривым, не принадлежащим* ω^4=0, *параллельны оси пучка.*

б) Пусть rang A_*=1. В этом случае в точке $M\in G$ плоскость $T_2\subset\pi_3$ и 2-мерная эквидирекционная поверхность является интегральной поверхностью для ω^4=0. Поместим векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ в плоскость T_2, тогда получим

$$A_1^1 = A_2^1 = A_1^2 = A_2^2 = 0, \begin{vmatrix} A_3^1 & A_4^1 \\ A_3^2 & A_4^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Кроме того, так как rang$A$=2, то A_1^3=A_2^3=0, $(A_3^1)^2$+$(A_3^2)^2$≠0. Эквидирекционные поверхности после этого определятся уравнениями

$$\omega^3 = \omega^4 = 0, \qquad (9)$$

а асимптотические линии – уравнениями

$$(A_3^1\omega^1 + A_3^2\omega^2 + A_3^3\omega^3)\omega^3 = 0, \omega^4 = 0.$$

Таким образом, множество всех асимптотических распадается на два множества, одно из которых совпадает с (9), следовательно, является голономным, второе же – неголономным, так как система уравнений

$$A_3^1\omega^1 + A_3^2\omega^2 + A_3^3\omega^3 = 0, \omega^4 = 0 \qquad (10)$$

не является вполне интегрируемой.

Конус касательных к асимптотическим линиям в точке M распадается на две двумерные плоскости. Одна из них совпадает с T_2, вторая T_2^* имеет уравнения

$$A_3^1x^1 + A_3^2x^2 + A_3^3x^3 = 0, x^4 = 0.$$

Направив вектор $\vec{e}_1$ по линии пересечения плоскостей T_2 и T_2^*, получим A_3^1=0,A_3^2≠0. A_3^3=–$k_3^{(2)}$=H, $k_1^{(2)}$=$k_2^{(2)}$=0, A_3^2=$k_3^{(2)}$tgφ, где φ – угол между плоскостями T_2 и T_2^*, если $k_3^{(2)}$≠0. Если же $k_3^{(2)}$=0, то плоскость T_2^* ортогональна плоскости T_2.

Вектор кривизны $k\vec{n}$ линии тока векторного поля определяется формулой

$$k\vec{n} = A_4^1\vec{e_1} + A_4^2\vec{e_2} + A_4^3\vec{e_3}.$$

Всякое направление плоскости T_2 есть главное направление 2-го рода, соответствующее кривизне $k_1^{(2)}$=$k_2^{(2)}$=0. При этом, если A_3^3=0, то $k_3^{(2)}$=0 и других направлений 2-го рода в точке M не существует. Если же A_3^3≠0, то кривизне $k_3^{(2)}$=–A_3^3 соответствует главное направление $A_3^2\vec{e}_2$+$A_3^3\vec{e}_3$ ортогональное плоскости T_2^*. Линии кривизны 2-го рода, соответствующие $k_1^{(2)}$=$k_2^{(2)}$=0, совпадают с эквидирекционными линиями, то есть в каждой точке M образуют 2-мерную поверхность – интегральную для уравнения ω^4=0. При A_3^3=0 других линий кривизны 2-го рода нет, а при A_3^3≠0 через точку M проходит ещё одна линия кривизны 2-го рода, не принадлежащая эквидирекционной поверхности. Эта линия определяется системой уравнений

$$A_3^3\omega^2 - A_3^2\omega^3 = 0, \omega^1 = \omega^4 = 0.$$

Вычислив главные кривизны и главные направления 1-го рода убеждаемся, что одна из главных кривизн 1-го рода равна нулю ($k_1^{(1)}=0$) и ей соответствует главное направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{e}_1$. Итак, для данного класса векторных полей не только $K_2=0$, но и $K_1=0$. Однако $\omega^4=0$ остаётся неголономным многообразием, так как вектор неголономности $\vec{\rho}=1/2A_3^2\vec{e}_1\neq\vec{0}$. Направление вектора неголономности совпадает с главным направлением 1-го рода (заметим, что оно является также одним из главных направлений 2-го рода). Если $A_3^3=0$ ($k_3^{(2)}=0$), то главными направлениями 1-го рода будут также направления (0: 1: ±1), совпадающие с направлениями биссектрис углов между прямыми, получающимися в сечении плоскостей $\boldsymbol{T}_2$ и $\boldsymbol{T}_2^*$ плоскостью, ортогональной прямой $\boldsymbol{T}_2\cap\boldsymbol{T}_2^*$.

Рассмотрим множество плоскостей π_3. Найдём характеристики плоскости, полученные при её смещении по любому направлению:

$$x^4 = 0,$$
$$A_4^1\omega^4 x^1 + (A_3^2\omega^3 + A_4^2\omega^4)x^2 + (A_3^3\omega^3 + A_4^3\omega^4)x^3 + \omega^4 = 0.$$

Отсюда видим: 1) множество плоскостей π_3 зависит лишь от двух параметров; 2) все характеристики плоскости π_3 образуют пучок с осью

$$x^4 = 0,$$
$$A_3^2 x^2 + A_3^3 x^3 = 0,$$
$$A_4^1 x^1 + A_4^2 x^2 + A_4^3 x^3 = 0;$$

3) при смещении по любой кривой из $\omega^4=0$, не лежащей на эквидирекционной поверхности, мы имеем одну и ту же характеристику плоскости π_3, совпадающую с плоскостью $\boldsymbol{T}_2^*$.

В результате доказано следующее предложение.

Теорема 3. *Гладкое векторное поле, для которого* $K_2=0$, rang $A=2$, rang $A^*=1$ *обладает следующими свойствами*: 1) *по крайней мере, две из главных кривизн 2-го рода равны нулю* ($k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=0$); 2) *через всякую точку M проходит 2-мерная эквидирекционная поверхность, являющаяся интегральной поверхностью для* $\omega^4=0$ *и принадлежащая гиперплоскости* π_3; 3) *все линии эквидирекционной поверхности являются линиями кривизны 2-го рода, соответствующими кривизнам* $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=0$, *а также и асимптотическими линиями*; 4) *конус касательных к асимптотическим линиям в точке M распадается на две, пересекающиеся по прямой, двумерные плоскости* $\boldsymbol{T}_2$ *и* $\boldsymbol{T}_2^*$, *одна из которых* ($\boldsymbol{T}_2$) *является касательной плоскостью к эквидирекционной поверхности*; 5) *множество всех асимптотических линий распадается на два множества: голономное, расслаивающееся на эквидирекционные поверхности, и неголономное с касательными плоскостями* $\boldsymbol{T}_2^*$ *в каждой точке M*; 6) *полная кривизна* K_1 *первого рода также равна нулю, но среди главных кривизн 1-го рода лишь одна обращается в нуль* ($k_1^{(1)}=0,k_2^{(1)}\neq0,k_3^{(1)}\neq0$); 7) *направление прямой* $\boldsymbol{T}_2\cap\boldsymbol{T}_2^*$ *есть главное направление 1-го рода, соответствующее* $k_1^{(1)}=0$; 8) *при* $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=k_3^{(2)}=0$ *все направления плоскости* $\boldsymbol{T}_2$ *являются главными направлениями 2-го рода, других главных направлений 2-го рода нет*; 9) *при* $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=0,k_3^{(2)}\neq0$ *кроме главных направлений 2-го рода, лежащих в* $\boldsymbol{T}_2$, *имеется ещё одно главное направление 2-го рода, ортогональное* $\boldsymbol{T}_2^*$ *и прямой* $\boldsymbol{T}_2\cap\boldsymbol{T}_2^*$; 10) *множество плоскостей* π_3 *зависит лишь от двух параметров и имеет в качестве огибающей трёхмерный торс с прямолинейными образующими*; 11) *характеристикой плоскости* π_3, *полученной при смещении по любой кривой из* $\omega^4=0$, *является плоскость* $\boldsymbol{T}_2^*$.

Векторные поля, для которых $K_2=0$ и rang $A=1$

Если, rang $A=1$, то через каждую точку $M\in G$ проходит одна трёхмерная эквидирекционная поверхность [3]. Касательная плоскость $\boldsymbol{T}_3$ этой поверхности либо пересекает плоскость π_3 по двумерной плоскости $\boldsymbol{T}_2=\pi_3\cap\boldsymbol{T}_3$, либо $\boldsymbol{T}_3=\pi_3$. В последнем случае пфаффово многообразие $\omega^4=0$ – голономно и мы имеем слоение [3], слоями которого являются трёхмерные линейчатые поверхности. Этот случай оставляем в стороне и переходим к рассмотрению первого случая.

Плоскость $\boldsymbol{T}_2=\pi_3\cap\boldsymbol{T}_3$ определяется уравнениями

$$A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 + A_3^2 x^3 = 0,$$
$$x^4 = 0. \qquad (11)$$

Поместим векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ в эту плоскость, тогда $A_1^2=A_2^2=0,A_3^2\neq0$ и система (11) примет вид

$$x^3 = x^4 = 0. \qquad (12)$$

Так как в рассматриваемом случае rang $A=1$, то

$$A_1^1 = A_2^1 = A_1^3 = A_2^3 = 0, \begin{vmatrix} A_3^1 & A_4^1 \\ A_3^2 & A_4^2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} A_3^2 & A_4^2 \\ A_3^3 & A_4^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

При этих условиях конус касательных к асимптотическим линиям в точке M распадается на две двумерные плоскости: $\boldsymbol{T}_2$ и $\boldsymbol{T}_2^*$. Плоскость $\boldsymbol{T}_2$ имеет уравнения (12), плоскость $\boldsymbol{T}_2^*$ – уравнения

$$A_3^1 x^1 + A_3^2 x^2 + A_3^3 x^3 = 0,$$
$$x^4 = 0.$$

Так как $A_3^2\neq0$, то можно положить $A_3^1=0$ направив вектор $\vec{e}_1$ по прямой $\boldsymbol{T}_2\cap\boldsymbol{T}_2^*$. Кроме того, из (13) следует, что $A_4^1=0$. После этого репер $\{M,\vec{e}_\alpha\}$ становится каноническим. В нём вектор кривизны линии тока поля $\boldsymbol{v}$ определяется формулой

$$k\vec{n} = A_4^2\vec{e_2} + A_4^3\vec{e_3}.$$

То есть соприкасающаяся плоскость линии тока поля $\boldsymbol{v}$ ортогональна прямой $\boldsymbol{T}_2\cap\boldsymbol{T}_2^*$, а вектор неголономности

$$\vec{\rho} = \tfrac{1}{2} A_3^2\vec{e_1} \neq 0$$

параллелен этой прямой.

Находим главные кривизны и главные направления 2-го рода, получаем $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=0,k_3^{(2)}=-A_3^3$. Главные направления 2-го рода в точке M, соответствующие кривизнам $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=0$ – это все направле-

ния плоскости T_2. Направление же, соответствующее $k_3^{(2)}=-A_3^3$, есть направление вектора $A_3^2\vec{e}_2+A_3^3\vec{e}_3$, который при $A_3^3=0$ лежит в плоскости T_2, а при $A_3^3\neq 0$ ортогонален плоскости T_2^*.

Все асимптотические линии, касающиеся T_2, лежат в трёхмерной плоскости π_3 и совпадают с теми линиями кривизны второго рода, которые соответствуют кривизнам $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=0$.

Для главных кривизн 1-го рода находим формулы

$$k_1^{(1)}=0, k_{2,3}^{(1)}=\tfrac{1}{2}(-k_3^{(2)}\pm\sqrt{(k_3^{(2)})^2+4(\rho^1)^2}).$$

Главное направление 1-го рода, соответствующее кривизне $k_1^{(1)}=0$, совпадает с направлением прямой $T_2\cap T_2^*$. Это также случай, когда $K_1=K_2=0$, но пфаффово многообразие, ортогональное векторному полю, остаётся неголономным, даже если все главные кривизны 2-го рода нули. Заметим, что при $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=k_3^{(2)}=0$ плоскости T_2 и T_2^* ортогональны.

Для данного класса векторных полей характеристики плоскости π_3 определяются уравнениями

$$x^4=0,$$
$$(A_3^2\omega^3+A_4^2\omega^4)x^2+(A_3^3\omega^3+A_4^3\omega^4)x^3-\omega^4=0.$$

Отсюда видим, что множество всех плоскостей π_3 зависит лишь от двух параметров. При смещении по любой кривой из $\omega^4=0$, не лежащей на эквидирекционной поверхности, мы имеем одну и ту же характеристику – плоскость T_2^*. При смещении по кривым, не принадлежащим $\omega^4=0$, характеристики плоскости π_3 параллельны T_2^*. Таким образом, двупараметрическое семейство плоскостей π_3 не имеет огибающей и состоит из касательных плоскостей однопараметрического семейства торсов с двумерными плоскостными образующими. Итак, мы пришли к следующему утверждению.

Теорема 4. *Гладкое векторное поле, для которого* $K_2=0$, *и вектор неголономности* $\vec{\rho}\neq 0$ *обладает следующими свойствами*: 1) *по крайней мере, две главные кривизны второго рода равны нулю* $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=0$; 2) *через каждую точку M проходит одна 3-мерная эквидирекционная поверхность*, *касательная плоскость* T_3 *которой пересекает плоскость* π_2 *по двумерной плоскости* T_2; 3) *линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизнам* $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=0$ *образуют в точке M 2-мерную поверхность, лежащую в плоскости* π_3 *и имеющую касательную плоскость, совпадающую с* T_2; 4) *конус касательных к асимптотическим линиям в точке M распадается на пару двумерных плоскостей* T_2 *и* T_2^*, *пересекающихся по прямой, при этом асимптотические линии, касающиеся* T_2, *совпадают с линиями кривизны 2-го рода*; 5) *одна из линий кривизны 1-го рода равна нулю* ($k_1^{(1)}=0$), *а соответствующее ей главное направление 1-го рода совпадает с направлением прямой* $T_2\cap T_2^*$; 6) *плоскости* T_2 *и* T_2^* *ортогональны лишь при* $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=k_3^{(2)}=0$, *в этом случае все главные кривизны 2-го рода, проходящие через точку M, принадлежат двумерной поверхности;* 7) *если* $k_3^{(2)}\neq 0$, *то главное направление 2-го рода, соответствующее кривизне* $k_3^{(2)}\neq 0$, *ортогонально плоскости* T_2^* *и прямой* $T_2\cap T_2^*$; 8) *множество плоскостей* π_3, *ортогональных векторному полю, зависит от двух параметров*, *не имеет огибающей и состоит из касательных плоскостей однопараметрического семейства торсов с 2-мерными плоскостными образующими.*

Теорема 5. *Существует единственное векторное поле класса* $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=k_3^{(2)}=0$ *с прямыми линиями тока и постоянным не равным нулю вектором неголономности.*

Доказательство. Пусть $k_1^{(2)}=k_2^{(2)}=k_3^{(2)}=0$ и линии тока векторного поля – прямые линии. Тогда $A_4^1=A_4^2=A_4^3=0$, а формулы (1) принимают вид

$$\omega_4^1=0,$$
$$\omega_4^2=2\rho^1\omega^3,$$
$$\omega_4^3=0. \qquad (14)$$

Вектор неголономности $\vec{\rho}$ в этом случае определяется формулой

$$\vec{\rho}=\rho^1\vec{e}_1.$$

Потребуем, чтобы вектор $\vec{\rho}$ был постоянным не равным нулю вектором. Тогда

$$d\vec{\rho}=\vec{0}.$$

То есть $d\rho\vec{e}_1+\rho^1(\omega_1^2\vec{e}_2+\omega_1^3\vec{e}_3)=\vec{0}$. Отсюда следует

$$\rho^1=\text{const}\neq 0, \omega_1^2=\omega_1^3=0. \qquad (15)$$

В силу (14), (15) для внешних дифференциалов базисных форм имеем

$$d\omega^1=0, d\omega^2=2\rho^1\omega^4\wedge\omega^3, d\omega^3=$$
$$=\omega^2\wedge\omega_2^3, d\omega^4=2\rho^1\omega^3\wedge\omega^2.$$

Дифференцируя внешним образом формы (14) и применяя затем лемму Картана, получим $\omega_2^3=0$ и тогда $d\omega^3=0$.

Так как $d\omega^1=0$, $d\omega^3=0$, то можно положить $\omega^1=dt$, $\omega^3=dy$. Кроме того, обозначим $2\rho^1=\alpha$. После этого деривационные формулы репера принимают вид

$$d\vec{r}=dt\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2+dy\vec{e}_3+\omega^4\vec{e}_4,$$
$$d\vec{e}_1=\vec{0},$$
$$d\vec{e}_2=-\alpha dy\vec{e}_4,$$
$$d\vec{e}_3=\vec{0},$$
$$d\vec{e}_4=\alpha dy\vec{e}_2. \qquad (16)$$

Из (16) имеем

$$\vec{e}_1=\vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_3=\vec{\varepsilon}_3, \frac{d\vec{e}_2}{dy}=-\alpha\vec{e}_4, \frac{d^2\vec{e}_2}{dy^2}=-\alpha\vec{e}_2.$$

Следовательно,

$$\vec{e}_2=\vec{\varepsilon}_2\cos(\alpha y)+\vec{\varepsilon}_4\sin(\alpha y),$$
$$\vec{e}_4=\vec{\varepsilon}_2\sin(\alpha y)-\vec{\varepsilon}_4\cos(\alpha y),$$
$$d\vec{r}=\vec{\varepsilon}_1 dt+\omega^2(\vec{\varepsilon}_2\cos(\alpha y)+\vec{\varepsilon}_4\sin(\alpha y))+$$
$$+\vec{\varepsilon}_3 dy+\omega^4(\vec{\varepsilon}_2\sin(\alpha y)-\vec{\varepsilon}_4\cos(\alpha y)),$$

где $(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_4)$ – постоянный ортонормированный базис, α=const≠0. Заметим, что

$$d(\cos(\alpha y)\omega^2+\sin(\alpha y)\omega^4)=0,$$
$$d(\sin(\alpha y)\omega^2-\cos(\alpha y)\omega^4)=0.$$

Следовательно, можно положить

$$\cos(\alpha y)\omega^2+\sin(\alpha y)\omega^4=dx,$$
$$\sin(\alpha y)\omega^2-\cos(\alpha y)\omega^4=dz.$$

Итак,

$$dr=\vec{\varepsilon}_1dt+\vec{\varepsilon}_2dx+\vec{\varepsilon}_3dy+\vec{\varepsilon}_4dz.$$

Отсюда находим

$$\vec{r}=t\vec{\varepsilon}_1+x\vec{\varepsilon}_2+y\vec{\varepsilon}_3+z\vec{\varepsilon}_4+\vec{r}_0, \qquad (17)$$

$\vec{r}_0$ – постоянный вектор. Поместим начало неподвижной системы координат в точку $M_0(\vec{r}_0)$, за базис примем векторы $(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_4)$. Из (17) следует, что всякая точка $M\in\boldsymbol{E}_4$ в данной неподвижной декартовой системе координат имеет координаты (t,x,y,z), а векторным полем, удовлетворяющим условиям теоремы, будет поле $\vec{e}_4=\sin(\alpha y)\vec{\varepsilon}_2-\cos(\alpha y)\vec{\varepsilon}_4$, где α=const≠0. Тем самым доказано, что в $\boldsymbol{E}_4$ существует единственное векторное поле, для которого все три главные кривизны 2-го рода нули, линии тока – прямые линии, а вектор неголономности – постоянный вектор. Пфаффово многообразие, ортогональное данному полю, неголономно и определяется уравнением Пфаффа

$$\sin(\alpha y)dx-\cos(\alpha y)dz=0,$$

вектором неголономности является вектор $\vec{\rho}=\frac{\alpha}{2}\vec{\varepsilon}_1$.

Для векторного поля $\vec{e}_4=\sin(\alpha y)\vec{\varepsilon}_2-\cos(\alpha y)\vec{\varepsilon}_4$ находим основные инварианты, инвариантные линии и поверхности в неподвижной декартовой системе координат.

Эквидирекционные поверхности представляют собой трёхмерные плоскости $y=c$.

Асимптотические линии – линии, лежащие в двумерных плоскостях

$$x=a,\quad z=b \qquad (18)$$

и

$$y=c,\quad z=\mathrm{tg}(\alpha c)x+m. \qquad (19)$$

Главными кривизнами 1-го рода будут $k_1^{(1)}=0, k_2^{(2)}=\frac{\alpha}{2}, k_3^{(3)}=-\frac{\alpha}{2}$. Линии кривизны 1-го рода, соответствующие кривизне $k_1^{(1)}=0$, – это прямые, являющиеся линиями пересечения плоскостей (18) и (19). Линии кривизны 1-го рода, соответствующие кривизнам $k_2^{(1)}=\frac{\alpha}{2}, k_3^{(1)}=-\frac{\alpha}{2}$ – это винтовые линии, определяемые уравнениями

$$t=c_1,\quad x=\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha y)+c_2,\quad z=-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha y)+c_3 \qquad (20)$$

и

$$t=c_1,\quad x=-\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha y)+c_2,\quad z=\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha y)+c_3. \qquad (21)$$

Из (20) и (21) видим, что линии кривизны 1-го рода, проходящие через точку $M\in\boldsymbol{E}_4$ и соответствующие не равным нулю главным кривизнам 1-го рода, принадлежат одной трёхмерной плоскости, лежат на двух круговых цилиндрах одинакового радиуса $\frac{1}{\alpha}$ с общей образующей и общей двумерной диаметральной плоскостью. Кривизны k всех линий кривизны 1-го рода одинаковы ($k=\frac{1}{\alpha}$). Кручения этих линий $\kappa=-\frac{1}{\alpha}$ также одинаковы во всех точках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вершик А.М., Гершкович В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. – М.: Изд-во ВИНИТИ, 1987. – С. 5–85.
2. Слухаев В.В. Геометрия векторных полей. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. – 96 с.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П. , Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 759 с.
4. Онищук Н.М. Геометрия векторного поля в четырёхмерном евклидовом пространстве // Международная конференция по математике и механике (избранные доклады). – Томск, 2003. – С. 60–68.

Поступила 26.05.2006 г.